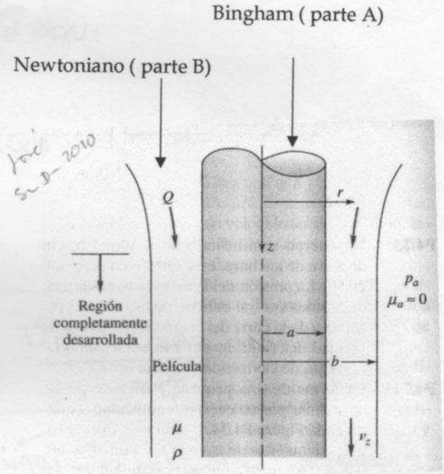
Universidad Simón Bolívar
Departamento de Termodinámica y
Fenómenos de Transferencia
Fenómenos de Trasporte I
Septiembre-Diciembre 2009

Nombre:

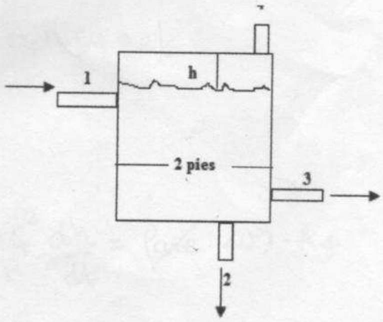
Segundo Examen Parcial (30%)

Problema 1. (20 puntos)
A) Un fluido Binghan ideal (μ, τ_o) fluye dentro de un ducto cilíndrico vertical de radio a y longitud L. Se sabe que en la entrada P=Po y en la salida P=PL a) Obtener el perfil de velocidades, esfuerzos y presión. b) Obtenga una expresión para el caudal en función de la caída de presión para el caso cuando el fluido se deforma. c) Calcular el radio crítico ro
B) Si ahora por la parte externa del ducto fluye hacia abajo un fluido Newtoniano (μ,ρ) formando una película de líquido uniforme de radio exterior constante **b.** a) Obtenga una expresión para el perfil de velocidades. b) Calcular la fuerza que ejerce el fluido sobre la pared.



Problema 2. (5 puntos)
Una gota de agua cae dentro de un fluido de densidad 0,879 gr/cm³ y viscosidad 0,9 gr/cm s: Si la masa de la gota es 0,065 gr, calcular su velocidad terminal.

Problema 3. (5 puntos)
Hacia dentro de un tanque cilíndrico fluye agua a través de un tubo 1 con una velocidad de 20 pies/s y sale a través de los tubos 2 y 3 con una velocidad de 8 y 10 pies/s respectivamente. En 4 hay una válvula ventosa abierta a la atmósfera. a) Calcular la variación de la altura con el tiempo, b) ¿Cuál es la velocidad promedio del flujo de aire a través de 4, suponiendo que el flujo es incompresible?. Datos adicionales: D1=3 pulg, D2=2 pulg D3= 2,5 pulg, D4= 2 pulg.



$$\mu \frac{\partial v_z}{\partial r} + \tau_0 = \frac{Kr}{2} + \frac{C_1}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial r} = \left(\frac{Kr}{2} + \frac{C_1}{r} - \tau_0\right)\frac{1}{\mu}$$

$$\Rightarrow v_z = \frac{1}{\mu}\left(\frac{Kr^2}{4} + C_1 \ln(r) - \tau_0 r\right) + C_2$$

Condiciones de borde

$r=0$, $v_z =$ finito $\Rightarrow C_1 = 0$

$r=a$, $v_z = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{\mu}\left(\frac{Ka^2}{4} - \tau_0 a\right) + C_2 \rightarrow C_2 = -\frac{1}{\mu}\left(\frac{Ka^2}{4} - \tau_0 a\right)$

$$\Rightarrow \boxed{v_z = \frac{1}{\mu}\left(\frac{K}{4}(r^2 - a^2) - \tau_0 (r - a)\right)}$$ Perfil de velocidad

$$\Rightarrow \tau_{r\theta} = \mu \frac{\partial v_z}{\partial r} + \tau_0 = \frac{2Kr}{4} - \tau_0 + \tau_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_{r\theta} = \frac{Kr}{2}} \quad \tau > \tau_0$$

con $K = \frac{P_L - P_0}{L} - \rho g$

Radio crítico $\tau < \tau_0$

$$\Rightarrow \tau_0 = \frac{Kr}{2} \rightarrow \boxed{r_c = \frac{\tau_0 \cdot 2}{K}}$$

Para hallar Q en donde deforma el lugar..., se tiene que $\tau_0 = 0$ no! para $r=0 \Rightarrow$ No deformará para $r < r_c$, se obtendrá una expresión con lo que sigue a

$$\rightarrow Q = A \langle v \rangle = \cancel{\frac{1}{A}}\cancel{A} \int_0 \int_{r_c} \frac{1}{\mu}\left(\frac{K}{4}(r^2 - a^2) - \tau_0 (r-a)\right) r\,dr\,d\theta =$$

$$= \frac{2\pi}{\mu}\left[\frac{K}{4}\left(\frac{r^4}{4} - \frac{a^2 r^2}{2}\right) - \tau_0\left(\frac{r^3}{3} - a\frac{r^2}{2}\right)\right]_{r_c}^{a}$$

$$\rightarrow Q = \frac{2\pi}{\mu}\left[\frac{K}{4}\left(\frac{a^4}{4} - \frac{a^4}{2}\right) - \tau_0\left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2}\right) - \frac{K}{4}\left(\frac{r_c^4}{4} - \frac{a^2 r_c^2}{2}\right) + \tau_0\left(\frac{r_c^3}{3} - \frac{a r_c^2}{2}\right)\right]$$

$$Q = \frac{2\pi}{\mu}\left[-\frac{Ka^4}{8} - \tau_0\left(\frac{a^3}{3}\right) - \frac{K}{4}\left(\frac{r_c^4}{4} - \frac{a^2 r_c^2}{2}\right) + \tau_0\left(\frac{r_c^3}{3} - \frac{a r_c^2}{2}\right)\right]$$

Parte b Con las mismas suposiciones que en la parte anterior

Aplicando Continuidad

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow v_z \neq f(z)$$

NS

r: $0 = -\frac{\partial P}{\partial r} \Rightarrow P \neq f(r)$

θ: $0 = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} \Rightarrow P \neq f(\theta)$

z: $0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g + \mu\left[\frac{1}{r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}}^{\,0}\right]$ NO HAY VARIACIÓN DE v_z CON θ

$\Rightarrow \cancel{\frac{\partial P}{\partial z}} = \rho g + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right] \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) = -\frac{\rho g \cdot r}{\mu}$

0, por ser película

$$r\frac{\partial v_z}{\partial r} = -\frac{\rho g r^2}{2\mu} + C_1$$

$$\boxed{v_z = -\frac{\rho g r^2}{4\mu} + C_1 \ln(r) + C_2}$$

condiciones de borde

$r = b$, $\tau_{rz} = 0$

$r = a$, $v_z = 0$ (1)

se sabe que

$$\tau_{rz} = \mu\frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{-\rho g r}{2} + \frac{C_1}{r}$$

$\Rightarrow$ si $r = b$, $\tau_{rz} = 0 \Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{\rho g b^2}{2}}$

además

$r = a$, $v_z = 0$ $\quad 0 = -\frac{\rho g (b-a)^2}{4\mu} + \frac{\rho g b^2}{2} \cdot \ln(a) + C_2$

$$\Rightarrow \boxed{C_2 = \frac{\rho g (b-a)^2}{4\mu} - \frac{\rho g b^2}{2}\ln(a)}$$

a) $\Rightarrow \boxed{v_z = -\frac{\rho g r^2}{4\mu} + C_1 \ln(r) + C_2}$ con C_1 y C_2 calculados anteriormente

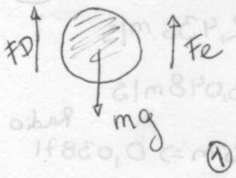
$$F = \left[\mu\frac{\partial v_z}{\partial r}\right] \cdot A$$

b) $F = \tau \cdot A = \left(-\frac{\rho g r}{2} + \frac{\rho g b^2}{r\,2\,r}\right)_{r=a} \cdot 2\pi a \cdot L = \frac{\rho g}{2}\left(-a + \frac{b^2}{a}\right) \cdot 2\pi a \cdot L$

$$\boxed{F = a\rho g\pi(b^2 - a^2)L}$$

José F. Rivera
07-41494

$$F_D + Fe - mg = 0$$



$$\frac{1}{2}\rho_{fluido} \cdot v^2 C_D \cdot \pi r^2 - \rho_{fluido} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 - \rho_{gota} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot g = 0$$

(1) $\frac{1}{2} 0{,}879 \frac{gr}{cm^3} v^2 C_D \cdot \pi (0{,}25)^2 - 0{,}879 \cdot \frac{4}{3}\pi(0{,}25)^3 - 1 \cdot \frac{4}{3}\pi(0{,}25)^3 \cdot 9800 = 0$

$$\Rightarrow v^2 C_D = 89{,}33 \Rightarrow v^2 = \frac{89{,}33}{C_D}$$

$V_{gota} = \frac{m}{\rho}$

(1) $\Rightarrow \boxed{v_{cal} = \frac{9{,}46}{\sqrt{C_D}}}$ (I)

$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{m}{\rho}$

$r^3 = \frac{m}{\rho} \cdot \frac{3}{4\pi}$

$r = \sqrt[3]{\frac{0{,}065}{1} \cdot \frac{3}{4\pi}}$

$\boxed{r = 0{,}25\ cm}$ (1)

1) Supongo Re
2) De Re calculo v_{sup}
3) Se lee C_D
4) Se calcula v_{cal} de (I)
5) $f = v_{cal} - v_{dato}$

$Re = \frac{\rho v D}{\mu} \Rightarrow$

$v = \frac{Re \cdot \mu}{\rho D}$

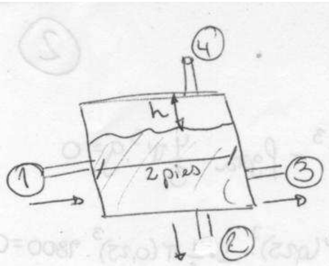
$v = \frac{Re}{48{,}83}$

(1)

Re	v_{sup}	C_D	v_{cal}	f
100	2,04	1	9,4519	7,40
1	0,020	30	0,31	0,29
0,2	0,0040	160	0,05	0,055

$v = 3{,}1 \times 10^{-4}\ m/s$

0,0003



3

$v_1 = 20 \frac{\cancel{pie}}{s} \cdot \frac{12\ \cancel{pulg}}{1\ \cancel{pie}} \cdot \frac{2{,}54}{1\ \cancel{pulg}} \times 10^{-2}\ m = 6{,}096\ m/s$

$v_2 = 8\ pie/s \qquad = 2{,}438\ m/s$

$v_3 = 10\ pie/s \qquad = 3{,}048\ m/s$

Radio

$D_1 = 3\ pulg \cdot \frac{2{,}54 \times 10^{-2}\ m}{1\ pulg} = 0{,}07742\ m \Rightarrow 0{,}03871$

$D_2 = 2\ pulg \qquad = 0{,}0508\ m \Rightarrow 0{,}0254$

$D_3 = 2{,}5\ pulg \qquad = 0{,}0635\ m \Rightarrow 0{,}0317$

$D_4 = 2\ pulg \qquad = 0{,}0508\ m \Rightarrow 0{,}0254$

$D_T = 0{,}6096\ m$

$R = 0{,}3048$

$\frac{dm}{dt} = \sum \dot{m}e - \sum \dot{m}s$ para el agua

$\cancel{\rho_{ag}} \frac{dV}{dt} = \cancel{\rho_1} Q_1 - \cancel{\rho_2} Q_2 - \cancel{\rho_3} Q_3$

$\pi r_T^2 \frac{dh}{dt} = Q_1 - Q_2 - Q_3$

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{Q_1 - Q_2 - Q_3}{\pi r_T^2} = \frac{v_1 A_1 - v_2 A_2 - v_3 A_3}{\pi r_T^2}}$$

$\frac{dh}{dt} = \frac{0{,}02869 - 0{,}004941 - 0{,}009622}{0{,}291864} = \frac{0{,}014127}{0{,}291864}$

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = 0{,}04824\ \frac{m}{s}}$$ 0,1484 pie/s

otra forma:

$v_T = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$

$\frac{dv_T}{dt} = \frac{dv_1}{dt} + \frac{dv_2}{dt} + \frac{dv_3}{dt} + \frac{dv_4}{dt}$

Tomando solo el aire

$\frac{dm_4}{dt} = \rho_{aire} \langle v \rangle_4 A_4 \Rightarrow \cancel{\rho_{aire}} \pi r_T^2 \frac{dh}{dt} = \cancel{\rho_{aire}} \langle v \rangle A_4$

$\frac{\cancel{\pi} r_T^2}{\cancel{\pi} r_4^2} \cdot \frac{dh}{dt} = \langle v \rangle_4 \Rightarrow \langle v \rangle_4 = \frac{(0{,}3048)^2}{(0{,}0254)^2} \cdot 0{,}02069$

$$\boxed{\langle v_4 \rangle = 6{,}94\ m/s}$$

21,37 pie/s

$\frac{dV_{ag}}{dt} = \frac{dV_{aire}}{dt}$

$v_1 A_1 - v_2 A_2 - v_3 A_3 = v_4 A_4 \longrightarrow$

$$\frac{dM}{dt} = \dot{m}_1 - m_2 - m_3$$

$$\rho_{ag} \overbrace{\pi r_T^2 \frac{dh}{dt}}^{dV/dt} = \rho_{ag} \left(v_1 A_1 - v_2 A_2 - v_3 A_3 \right)$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi r_T^2} \left(v_1 A_1 - v_2 A_2 - v_3 A_3 \right)$$

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{0{,}467}{\pi r_T^2}}$$

Todo el sistema suponiendo que <u>m_4 entra</u>

$$\dot{m}_1 + \dot{m}_4 - \dot{m}_3 - \dot{m}_2 = \frac{dM}{dt} \qquad \dot{m}_4 = \frac{dM_4}{dt} \Rightarrow \dot{m}_4 = \rho_{aire} \cdot \frac{dV_4}{dt}$$

$$\cancel{\rho_{aire}} \cdot \langle v_4 \rangle A_4 = \cancel{\rho_{aire}} \cdot \frac{dV_4}{dt}$$

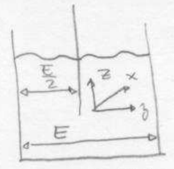
$$V_T = V_{agua} + V_{aire}$$

$$\frac{dV}{dt} = 0 = \frac{dV_{agua}}{dt} + \frac{dV_{aire}}{dt} = \left(\langle v_1 \rangle A_1 - v_2 A_2 - v_3 A_3 \right) + v_4 A_4 = 0$$

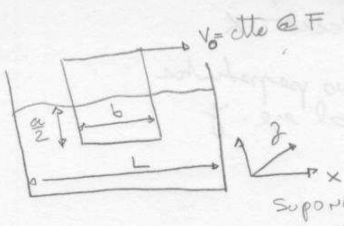
$$v_4 = \frac{v_1 A_1 - v_2 A_2 - v_3 A_3}{A_4}$$

Preparaduría N° 3

1)



VISTA FRONTAL



Fluido Newtoniano

a) Expresión para μ

b) Perfil de velocidades.

Suponer despreciables efectos de borde

Suposiciones

1) Fluido Incompresible   2) Estado Estacionario

3) Unidireccional $v_x = f(x,y,z)$, $v_y = 0$, $v_z = 0$

4) $P = P(x,y,z)$

Para el caso estudiado, el único esfuerzo cortante es:

$$\tau_{xy} = \mu \frac{dv}{dy} \quad \text{(para un lado de la placa)}$$

Además, para toda la placa

$$\Sigma F = \cancel{m \cdot a}^{\,0} \;(v = \text{ctte}) \Rightarrow F = -F_{viscosa} = 2A\tau_{xy}$$

Por lo tanto, debemos calcular el perfil de velocidades

Por continuidad:

$$\underbrace{\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}}}_{0} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}}}_{0} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}}}_{0} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

Suposición de unidirección

$$\Rightarrow v_x \neq f(x)$$

Navier-Stokes (fluido Newtoniano)

$$x: \; \rho\Big(\underbrace{\cancel{\frac{dv_x}{dt}}}_{\substack{0\\ \text{Estado}\\ \text{Estacionario}}} + \underbrace{\cancel{v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}}}_{\substack{0\\ v_x \neq f(x)}} + \underbrace{\cancel{v_y \frac{\partial v_y}{\partial y}} + \cancel{v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}}}_{\substack{0 \\ \text{Suposición de mov}\\ \text{unidireccional}}}\Big) = \underbrace{-\cancel{\frac{\partial P}{\partial x}}}_{0} + \underbrace{\cancel{\rho g_x}}_{0} + \mu\Big(\underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}}}_{v_x \neq f(x)} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}}}_{\substack{\text{No hay}\\ \text{variación con } z}}\Big)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial y} = C_1 \Rightarrow v_x = C_1 y + C_2$$

De las demás ecuaciones resulta

y: $0 = 0$

z: $\frac{\partial P}{\partial z} = \rho g_z$

Dado $v_x = C_1 z + C_2$

con las condiciones de borde

$$\begin{cases} z = 0 & v_x = v_0 \\ z = \varepsilon/2 & v_x = 0 \end{cases} \Longrightarrow C_2 = v_0 \wedge C_1 = -v_0\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)$$

Finalmente

$$\boxed{v_x = v_0\left[1 - \frac{2}{\varepsilon} z\right]}$$

Así pues, conocida F que se aplica a la placa

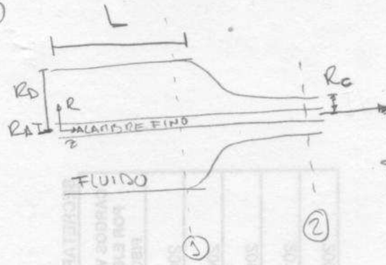
$$F = -F_{viscosas} = \tau_{xz} A \cdot 2$$

con $\tau_{xz} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\mu\left[\frac{2v_0}{\varepsilon}\right]$

$$\Longrightarrow F = -\left(-\mu\left(\frac{2v_0}{\varepsilon}\right)\cdot\left(b \cdot \frac{a}{2}\right)\cdot 2\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\mu = \frac{F\varepsilon}{2v_0 ab}}$$

②



Fluido Newtoniano

Incompresible, estado estacionario

$\Delta P = 0$ en dirección del movimiento

Se pide:

ⓐ Perfil de velocidades

ⓑ Perfil de esfuerzos

ⓒ Fuerza para mover el alambre

ⓓ Relación $R_C = f(R_A, R_D)$

Recordar

$$\int x\ln(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

Resolución:

Suposiciones: ① Unidireccional $v_z = f(r, z, \theta)$ $\quad v_\theta = v_r = 0$

② $P = P(r, \theta)$ no de z (DATO)

Por continuidad

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \Longrightarrow v_z \neq f(z)$$

Ya que es un fluido Newtoniano son aplicables las ecuaciones de N-S

$$\rightarrow r: \quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial r} + \rho g_r$$

$$\theta: \quad 0 = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} \Longrightarrow P \neq f(\theta) \Rightarrow P = f(r)$$

$$z: \quad 0 = -\underbrace{\cancel{\frac{\partial P}{\partial z}}}_{0} + \mu\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r v_z)\right)$$

$$\Longrightarrow \quad r v_z = c_1 \Longrightarrow \boxed{v_z = c_1\ln(r) + c_2} \quad ⓐ$$

Condiciones de Borde:

$r = R_a \quad v_z = v_a \Longrightarrow c_1 = \dfrac{v_a}{\ln(R_a/R_d)} \quad \wedge \quad c_2 = \dfrac{-v_a}{\ln(R_a/R_d)}\ln(R_d)$

$r = R_d \quad v_z = 0$

ⓑ $\tau_{zr} = \mu\left(\dfrac{\partial v_z}{\partial r}\right)$ (Newtoniano)

$$\Longrightarrow \boxed{\tau_{zr} = \frac{\mu c_1}{r}}$$

(c) $F = \tau A \Rightarrow F = \frac{\mu c_1 2\pi \cancel{R_A} L}{\cancel{R_A}}$

$$\Rightarrow \boxed{F = \mu c_1 \, 2\pi L}$$

(d) Para hallar $R_c = R_c(R_a, R_d)$ consideraremos que está en estado estacionario. El caudal de recubrimiento del punto (1) será igual al del punto (2)

$$Q_1 = Q_2$$

$$\langle v \rangle_1 A_1 = \langle v \rangle_2 A_2$$

En el pto (2)

$$\langle v \rangle_2 = v_a \Rightarrow Q_{salida} = v_a \pi (R_c^2 - R_a^2)$$

En el pto (1)

$$Q = \frac{1}{\cancel{A}} \int v_1 \, dA \cdot \cancel{A} = \int_0^{2\pi} \int_{R_a}^{R_D} (c_1 \ln(r) + c_2) \, r \, dr \, d\theta$$

$$= 2\pi \left[c_1 \left(\frac{r}{2} \ln(r) - \frac{r^2}{4} \right) + c_2 \frac{r^2}{2} \right]_{R_a}^{R_d}$$

Finalmente

$$\pi v_a (R_c^2 - R_a^2) = 2\pi \left[c_1 \left(\frac{R_d^2}{2} \ln(R_d) - \frac{R_d^2}{4} - \frac{R_a^2}{2} \ln(R_a) + \frac{R_a^2}{4} \right) + \pi c_2 \left[R_d^2 - R_a^2 \right] \right]$$

$$\Rightarrow (R_c^2 - R_a^2) = \frac{1}{\ln\left[\frac{R_a}{R_d}\right]} \left[\frac{R_d^2}{2} + R_a^2 \left(\ln\left(\frac{R_d}{R_a}\right) - \frac{1}{2} \right) \right]$$